|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 08.11.21 | **Приложения производной. Дифференциал и его применение.** | Дидактическая | Изучить приложения производной в физике и геометрии через решение проблемной задачи, осмысление необходимых теоретических знаний,через закрепление умений и навыков студентов по практическому применению производной для решения задач физики и геометрии, создать почву для более сложных умственных процессов, изучить дифференциал и его применение.  | 1) Закрепить знания, умения и навыки по вычислению производной функции.2)Изучить приложения производной в физике и геометрии.3) Создать почву для более сложных умственных процессов.4) Изучить дифференциал и его применение.5) Начать формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Какую задачу решил И.Ньютон?2) Какую задачу решил Г.Лейбниц?3) Назовите формулы, подтверждающие приложение производной в физике и геометрии.4) Назовите уравнение касательной и нормали.5) Для решения каких задач применяется дифференциал? | Изучить и составить конспект, следуя указаниям и требованиям, решить задачи:№1 Вычислить приближенно $\sqrt{50}$.№2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции  в точке с абсциссой . |
| Группа | 2ТЭМ | Развивающая | Развивать логическое и пространственное мышление. |
| Пара | I | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 24-25 |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями при помощи опорного конспекта занятия и учебника Элементы высшей математики/ Г.В.Григорьев и др. - М.: ИЦ Академия, 2014 г. - 320 с. (ссылка на электронный учебник: https://cloud.mail.ru/public/buNn/ijFYgVJ6h). Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 08.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открывались, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**08.11**

**Геометрический и физический смысл производной. Дифференциал и его применение.**

**1) Мотивация изучения нового материала. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Источником понятия производной стали, как известно, две задачи, которые рассматривали известный ученый И.Ньютон и немецкий математик Г.Лейбниц:

1) нахождение скорости при произвольном законе движения,

2) нахождение касательной к произвольной линии.

Решение этих задач привело к одной и той же вычислительной задаче, которая легла в основу дифференциального исчисления, благодаря которой определен основной принцип дифференциального исчисления и возникло понятие производной, представляющей собой скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента. Выводы и формулы, полученные во время решения этих вопросов также имеют широкое применение в физике, механике и геометрии.

**2) Сообщение темы, цели, заданий занятия. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Сегодня в теме «Приложения производной» мы имеем возможность, воспользовавшись наследием И.Ньютона и Г.Лейбница и вашими знаниями о производной, рассмотреть и решить одну из этих двух проблемных задач, расширить наши знания о производной и ее приложении, развить практические умения и навыки решения разнообразных задач с помощью полученных выводов и формул.

**3) Сообщение этапов занятия. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Для этого нам необходимо определить уровень и глубину теоретических знаний во время устного фронтального опроса, закрепить необходимые практические умения и навыки вычисления производных во время индивидуального опроса у доски, рассмотреть и осмыслить проблемную задачу, которая привела к приложению производной в физике, усвоить геометрическое приложение производной, закрепить полученные знания во время решения задач и моделирования решения задач.

**4) Актуализация опорных знаний обучающихся. Необходимо ответить на вопросы (вопросы и ответы записать в конспект).**

Вопрос 1. Дайте определение производной функции в точке.

Вопрос 2. Как обозначается производная функции?

Вопрос 3. Как называется процесс вычисления производной?

Вопрос 4. Когда функция дифференцируема на интервале?

Вопрос 5. Назовите производные некоторых элементарных функций: y = tg x, y = , y = arcsin x?

Вопрос 6. Какие правила дифференцирования существуют?

Вопрос 7. По какому алгоритму вычисляются производные элементарных функций в точке?

Вопрос 8. Назовите производные функций у =3 $х^{3}$, у = 2$\cos(х)$; у = 5ех ; у = 2 tgx.

Вопрос 9. Какая функция называется сложной?

Вопрос 10. Исправьте ошибки в вычислении производной функции:

у= sin 3х , у= 24х , у= ,

= cos 3x, = 4+24x ln2 , = .

Вопрос 11. Какая функция называется неявной?

Вопрос 12. Какая функция задана параметрически?

Вопрос 13. Закончите решение:

х3+у2=0, 

3х2+2у =0, t= *5*,

2у = -3х2, t=*5,*

= = .

Вопрос 14. Как найти производную второго, третьего, n – го порядка?

Вопрос 15. Найдите вторую производную функции у = 10х, у = 3 sinх.

**5) Актуализация опорных умений и навыков. Осмысление и закрепление необходимых для изучения нового материала практических умений и навыков вычисления производных элементарных функций в точке (записать в конспект).**

**Задача 1. Решить самостоятельно.**

Вычислить производную функции у(х)= -5х7+4х6-2х3+5х2-6х+1 в точке х0= -1.

**6) Изучение нового материала. Физический и геометрический смысл производной. Примеры и моделирование решения задач (ознакомиться, выделенное и задачи записать).**

В рамках темы "Производная на основании механического и геометрического смыслов" мы детально рассмотрим проблемную задачу, которая привела к физическому смыслу производной, закрепим полученные формулы, решая прямую и обратную физическую задачу, моделируя решение разнообразных физических задач, по аналогии определим геометрический смысл производной и используя уравнения касательной и нормали закрепим геометрический смысл производной.

Итак, рассмотрим новый материал **по плану:**

**1. Физическое приложение производной. Примеры.**

**2. Геометрическое приложение производной. Примеры.**

Для рассмотрения первого вопроса нам необходимо вспомнить некоторые физические величины и определить закон движения. Из физики нам известно, что

 t – время, которое измеряется в с,

S – длина пути, которая измеряется в м,

V – скорость движения, которая измеряется в м/с,

*а* – ускорение движения, которе измеряется в м/с2.

Закон движения – это зависимость пути S от времени t, то есть S=f(t).

Нам необходимо решить задачу, которая формулируется так: найти скорость тела, которое движется по закону S=f(t) в момент времени t.

Будем считать, что расстояние S и время t – физические величины, которые можно измерять.

Пусть за время от t до t+Δt тело прошло путь S+ΔS=f(t+Δt).

Тогда ΔS=f(t+Δt)-f(t)

Средняя скорость тела, которое движется вдоль некоторой линии, определяется по формуле

Vсер = 

Чтобы найти мгновенную скорость такого тела, необходимо перейти к границе отношения  при Δt→0:

V = lim  = lim  = 

Таким образом, мы решили нашу задачу и получили **физический смысл производной: скоростью тела, которое движется по закону S=f(t), называется производная первого порядка от закона движения за время t. Имеем, V(t) = SI(t).**

Продолжая, имеем: ускорением движения тела, которое движется по закону S=f(t), называется производная второго порядка от закона движения за время t.

Имеем, а(t) = SII(t) = VI(t).

Рассмотрим прямую стандартную задачу на применение физического смысла производной.

**Задача 1.** Найти скорость тела и его ускорение в момент времени t = 2с, если тело движется по закону

S (t) = 4t3 - 6t2 + t. Применим полученные формулы:

V(t) = SI(t) = 12t2 – 12t +1,

a(t) = VI(t) = 24t -12,

Если t =2c, имеем:

V(2) = 48 – 24 + 1=25(м/с),

а(2) = 48 – 12 = 36 (м/с2).

Продолжая рассмотрение этого вопроса, будем моделировать разнообразные физические задачи и алгоритмы их решения при помощи физического смысла производной.

Для рассмотренной прямой задачи существует и обратная.

**Задача 2.** Найти момент времени t, когда тело, которое движется по закону S(t), будет иметь скорость (ускорение) V м/с (а м/с2).

Для решения этой задачи необходимо найти закон скорости V (t) (закон ускорения а(t)) и решить уравнение V (t) = V ( а (t) = а).

Перед моделированием других задач проанализируем некоторые условия движения. Если тело останавливается, то V = 0 м/с. Если два тела движутся по законам S1 (t) та S2 (t), то их скорости будут равны при V1(t) = V2(t).

Сформулируем условие другой задачи.

**Задача 3.** Найти момент времени t, когда тело, которое движется по закону S(t), остановится. Для решения этой задачи необходимо найти V (t) и решить уравнение V (t) = 0.

Сформулируем условие четвертой возможной задачи на движение.

**Задача 4.** Найти момент времени, когда скорости тел, которые движутся по законам S1 (t) та S2 (t), будут равны. Для решения этой задачи необходимо найти V1(t) и V2(t) и решить уравнение V1(t) = V2(t).

Таким образом, мы не только рассмотрели задачу, которая привела к физическому смыслу производной, но и, благодаря методам научного познания, смоделировали различные физические задачи и алгоритмы их решения.

Сформулируем геометрический смысл производной по аналогии с физическим смыслом производной и рассмотрим его практическое применение. **Геометрический смысл производной: значение производной функции у=f(x) в точке х0 равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции у=f(x) в точке (х0; f(x0)) и положительным направлением оси ОХ. То есть, имеем**

**f ′(x0) = tg *φ*= k, где k – угловой коэффициент.**

Рассмотрим прямую задачу на применение геометрического смысла производной.

**Задача 5.**

Найти тангенс угла наклона касательной к кривой f(x) = х2 в точке М0(-2; 4).

Используя формулу геометрического смысла производной, имеем:

 fІ(x) = 2x,

 fІ(x0) = fІ(-2) = -4,

 Итак, tg *φ=* -4.

**С помощью геометрического смысла производной и уравнения прямой с угловым коэффициентом были получены уравнения касательной и нормали к графику функции у=f(x) в точке М0(х0;у0):**

**у-у(х0) = уІ(x0) (x-x0) и у-у(х0) = - (x-x0).**

Воспользуемся этими формулами для решения задач на составление уравнений касательной и нормали.

**Задача 6.** Составьте уравнения касательной и нормали к кривой у=х3 в точке М (1;1)

Проанализируем условие задачи. Имеем у=х3, х0=1, у0= у(х0) = 1.

yI(x) = 3х2

yI(x0) = yI(1) = 3.

Составим уравнения касательной и нормали по формулам

у-у(х0) = уІ(x0) (x-x0), у-у(х0) = - (x-x0),

у – 1 = 3 (х-1), у – 1 = -  (х-1),

3х – у -2 =0. 3у + х -4 =0.

**7) Изучение нового материала. Определение дифференциала и его геометрический смысл (записать в конспект выделенное).**

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x, то есть приращение этой функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и нелинейного членов:

Δy=f ′(x)⋅Δx+α(Δx)⋅Δx,

где α(Δx)→0 при Δx→0.

**Дифференциалом функции называется линейная относительно ∆х часть приращения функции. Она обозначается dy или df(x). Таким образом:**

 **dy = f ′(x)⋅Δx.**

Дифференциал функции составляет основную часть приращения функции.

Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента. По определению дифференциал аргумента есть приращение аргумента:

 dx=Δx.

**Формулу для дифференциала функции можно записать в виде:**

 **dy=f ′(x)dx.**

**Отсюда** **f ′(x) =** $\frac{dy}{dx}$**.**

**Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции в точке** $х\_{0}$ **равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента Δx.**

**8)** **Изучение нового материала. Применение дифференциала. Блочное закрепление (записать в конспект).**

Дифференциал применяется для приближенных вычислений в тех случаях, когда точные вычисления выполнить сложно или трудоёмко.

**1. При помощи дифференциала можно приближённо найти приращение функции y=f(x), пользуясь формулой, которая имеет место при достаточно малых Δx:**

 **(1) Δy ≈ dy или Δy ≈ f ′(x)⋅Δx.**

**Пример 1.**

Найти приращение функции у = 2х³ - 3х² + 5 при х = 3, Δx = 0,02.

**Решение.**

Δy ≈ у ′(x)⋅Δx.

Для применения формулы нам необходимо найти производную в точке х = 3:

у ′ = 6х² - 6х

у ' (х) = у ' (3) = 6∙3² - 6∙3 = 6∙9 - 18 = 54 - 18 = 36.

Подставим все числовые значения в формулу для приближенного приращения:

Δy ≈ 36∙0,02 = 0,72.

**Ответ: 0,72.**

**2. При помощи дифференциала можно приближённо найти значение функции в дробной точке по формуле:**

 **(2) f (x) ≈ f (**$х\_{0}$**) + f ′(**$х\_{0}$**)⋅Δx, где Δx = х -** $х\_{0}$**.**

**Пример 2.**

Найти приближенное значение функции f (x) = 4х² - 5х + 2 при х = 2,1.

**Решение.**

f (x) = 4х² - 5х + 2.

$х\_{0}$ - это целое число, ближайшее к х = 2,1

$х\_{0}$ = 2.

Тогда Δx = х - $х\_{0}$ = 2,1 - 2 = 0,1.

Мы проанализировали условие задачи. Теперь найдём недостающие элементы формулы:

f ($х\_{0}$) = f (2) = 4∙2² - 5∙2 + 2 = 16 - 10 +2 = 8

f ′(x) = 8х - 5

f ′($х\_{0}$) = f ′(2) = 8∙2 - 5 = 16 - 5 = 11.

Подставим в формулу:

f (2,1) ≈ f (2) + f ′(2)⋅0,1 = 8 + 11∙0,1 = 8 + 1,1 = 9,1.

**Ответ: 9,1.**

**3. При помощи формулы (2) можно приближенно вычислять корни и степени.**

**Пример 3.**

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{30}$.

**Решение.**

Из условияf(x)=$\sqrt[3]{х}$ ,  x=30.

Выберем начальную точку $х\_{0}$=27 (так, чтобы можно было извлечь корень в целых числах) .

Тогда Δx = x−$х\_{0}$= 30−27 = 3.

Найдём производную функции f(x)=$\sqrt[3]{х}$  и значение производной в точке $х\_{0}$=27:

f ′(x) = ($\sqrt[3]{х}$ )′=($х^{\frac{1}{3}}$)′= $\frac{1}{3} х^{-\frac{2}{3}}$ = $\frac{1}{3\sqrt[3]{х^{2}}}$

f ′(27)= $\frac{1}{3\sqrt[3]{27^{2}}}$ = $\frac{1}{3∙3^{2}}$ = $\frac{1}{27}$.

Применим формулу f(x)≈f($х\_{0}$)+f ′($х\_{0}$)Δx

$\sqrt[3]{30}$ ≈ $\sqrt[3]{27}$ + $\frac{1}{27}$. 3 = 3 + $\frac{1}{9}$ ≈ 3,111.

Ответ: 3,111.

**Пример 4.**

Вычислить приближенно $8,2^{\frac{2}{3}}$.

**Решение.**

Из условия f(x) =$ х^{\frac{2}{3}}$ ,  x = 8,2.

Пусть $х\_{0} $= 8, Δx = x−$х\_{0}$= 8,2 −$ 8$ = 0,2

Тогда f($х\_{0}$) = f(8) = $8^{\frac{2}{3}}$ = $\sqrt[3]{8^{2}}$ = ( $\sqrt[3]{8}$)² = 2² = 4.

Найдём производную функции и значение производной в точке $х\_{0} $= 8:

f ′(x) = ($х^{\frac{2}{3}}$ ) ' = $\frac{2}{3}$ ∙ $х^{\frac{2}{3} -1}$= $\frac{2}{3}$ ∙ $х^{-\frac{1}{3}}$ = $\frac{2}{3\sqrt[3]{х}}$

f ′(8) = $\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}$ = $\frac{2}{3∙2}$ = $\frac{1}{3}$.

Подставляем в формулу (2):

$8,2^{\frac{2}{3}}$ ≈ 4 + $\frac{1}{3}$ ∙ 0,2 ≈ 4 + 0, 067 = 4,067.

**Ответ: 4,067.**

**4. Для возведения в степень дробных чисел близких к нулю можно применить формулу:**

 **(3)** $ (1\pm α)^{n}$ **≈** $1^{n}$ **± n∙α, где α - бесконечно малое число, α→0**

**9) Домашнее задание: изучить и составить конспект, следуя указаниям, решить задачи:**

**№1 Вычислить приближенно** $\sqrt{50}$**.**

**№2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции  в точке с абсциссой .**